

Preparación Fase Local Olimpiada Matemática. Curso
2016/17
3 de marzo de 2017

3 de marzo de 2017

Para abrir boca:

1. ¿De cuántas maneras se pueden hacer tres grupos de tres personas de un total de nueve?
2. ¿Cuántas matrículas de vehículo puede haber con al menos un dígito par?
3. Si tenemos cinco ingredientes para una ensalada, ¿cuántas ensaladas distintas se pueden elaborar incluyendo ensaladas con un único elemento?
4. ¿Cómo podemos calcular la probabilidad de que dos personas en un grupo de n tengan cumplan años el mismo día si todos nacieron en un año de 365 días? ¿Cómo determinamos la probabilidad de que otra persona del grupo cumpla años nuestro mismo día? ¿Cómo sería la misma pregunta si lo que buscamos ahora son grupos de $2, 3, \dots, m$ pares que coincidan en su fecha de nacimiento del grupo inicial de n personas?

Para seguir:

5. Sea $A_1A_2 \dots A_{12}$ un dodecágono regular con centro O . Las regiones triangulares OA_iA_{i+1} , $1 \leq i \leq 12$ ($A_{13} = A_1$) son coloreadas en rojo, azul, verde o amarillo de modo que regiones adyacentes tengan colores distintos. ¿De cuántas maneras distintas se puede colorear el dodecágono?
6. ¿Existe algún polinomio $P(x)$ con alguno de sus coeficientes negativo pero tal que $P^n(x)$ tiene coeficientes estrictamente positivos para $n > 1$?
7. ¿De cuántas maneras distintas se puede rellenar en una cuadrícula 4×4 con 1 y -1 de modo que todas sus filas y todas su columnas sumen 0?
8. Los números positivos a, b y c satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Probar que $(a - c)(b - c) \leq 0$.

9. Dada una colección A_1, A_2, \dots, A_n de subconjuntos de $S = \{1, 2, \dots, n\}$ y una permutación π de S , se define el conjunto diagonal

$$D_\pi(A_1, A_2, \dots, A_n) = \{i \in S : i \notin A_{\pi(i)}\}.$$

¿Cuál es el número máximo de conjuntos distintos que pueden ser conjuntos diagonales para una elección concreta de los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n ?

10. En un campeonato de fútbol los partidos ganados cuentan como 3 puntos, los empatados como 1 punto y los perdidos como 0 puntos. Tras la celebración del campeonato resulta que el equipo que más puntos ha acumulado es el mismo que menos partidos ha ganado. Determina el número de equipos más pequeño con el que es posible esta situación.